Tema3. Números complejos

El conjunto formado por todos los números de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales, con las operaciones de adición y producto definidas por:

$$\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &= a+c+i(b+d)\\(a+ib)(c+id) &= ac-bd+i(ad+bc)\end{aligned}$$

se llama cuerpo de los números complejos y se representa por $\mathbb{C}$.

Se dice que a es la *parte real* y b la *parte imaginaria* del número complejo $a+ib$. Dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria. Los números complejos con parte imaginaria cero, $a = a + i0$, son números reales. Los números complejos con parte real cero, $ib = 0 + ib$, se llaman *imaginarios puros*.

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es 0 y la unidad del producto es 1. Además, $-a - ib$ es el opuesto de $a + ib$, y todo número $a + ib \neq 0$ tiene inverso:

$$(a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = 1.$$

Por la definición del producto de números complejos, se tiene que: $i^2 = -1$. El número complejo i se llama *“unidad imaginaria"*.

¿Es cierto que $\mathbf{1 = -1}$?

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i = \sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i = \sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

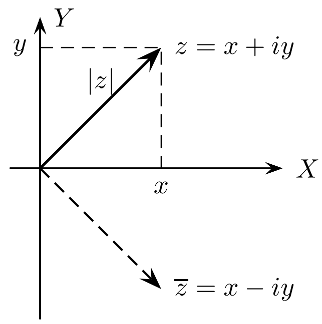
$$\mathbf{-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1}$$

Luego $1 = -1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado. ¿Dónde está el error? Al final de la lección lo sabrás.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica. Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho pero perdemos la relación de orden. No se puede definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: ¡nunca escribas desigualdades entre números complejos!.

Representación gráfica, complejo conjugado y módulo

Se representa $z = x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.



Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), el **conjugado** de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

El conjugado de una suma es la suma de los conjugados y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$$

El **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cualesquiera sean los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que:

- $\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
- El módulo de un producto es igual al producto de los módulos.

  $$|zw| = |z||w|$$

- El módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos.

  $$|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{(desigualdad triangular)}$$

  La desigualdad triangular es una igualdad si, y solamente si uno de ellos es un múltiplo positivo del otro; equivalentemente, están en una misma semirrecta a partir del origen.

Para expresar un cociente de complejos en forma cartesiana se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{u+iv}{x+iy} = \frac{(u+iv)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{ux+vy}{x^2+y^2} + i\frac{vx-uy}{x^2+y^2}.$$

Forma polar y argumentos de un número complejo

Un número complejo $z = x + iy$ distinto de 0 puede escribirse en la forma:

$$z = |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

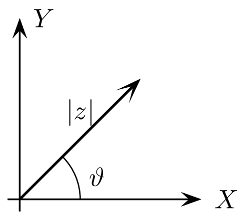
Donde debemos elegir ϑ por las condiciones:

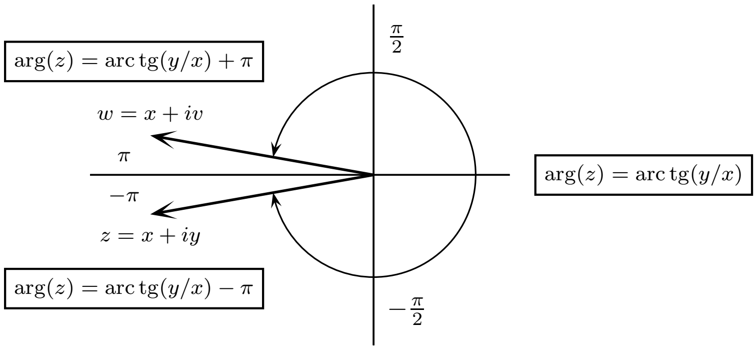
$$\cos\vartheta = \frac{x}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}\vartheta = \frac{y}{|z|}$$

Cualquier número $\vartheta \in \mathbb{R}$ que cumpla estas condiciones se llama **un argumento** de z. El conjunto de todos los argumentos de z es:

$$\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)\}$$

Este conjunto queda determinado cuando se conoce alguno de sus elementos, pues si $t_0 \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.





De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z. El argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi \ \text{ si } y < 0,\, x < 0 \\ -\pi/2 \ \text{ si } y < 0,\, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) \ \text{ si } x > 0 \\ \pi/2 \ \text{ si } y > 0,\, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi \ \text{ si } y \geqslant 0,\, x < 0 \end{cases}$$

La forma polar es muy útil para realizar productos de números complejos. Sean

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta), \qquad w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)) \end{aligned}$$

Para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos. Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro seguido de una homotecia.

$$\boxed{\vartheta \in \operatorname{Arg}(z),\ \varphi \in \operatorname{Arg}(w) \implies \vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)}$$

En particular: $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$. Por tanto:

$$\boxed{\arg z + \arg w = \arg(zw) \iff -\pi < \arg z + \arg w \leqslant \pi}$$

Fórmula de De Moivre

Si $z \neq 0$, $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $n \in \mathbb{Z}$, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$. Es decir:

$$\boxed{z^n = \big(|z|(\cos\vartheta + i\ \operatorname{sen}\vartheta)\big)^n = |z|^n\big(\cos(n\vartheta) + i\operatorname{sen}(n\vartheta)\big)}$$

Raíces de un número complejo

Dado un número natural $n \geqslant 2$, todo número complejo $z \neq 0$ tiene n raíces complejas distintas que vienen dadas por:

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Se define la **raíz n-ésima principal** de z que se representa por $\sqrt[n]{z}$ como:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}\right)}$$

Observa que $\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = \dfrac{\arg z}{n}$ y, por tanto: $-\dfrac{\pi}{n} < \arg\left(\sqrt[n]{z}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.

La raíz n-ésima principal de z es la única de las raíces n-ésimas de z cuyo argumento principal está en el intervalo $]-\pi/n, \pi/n]$.

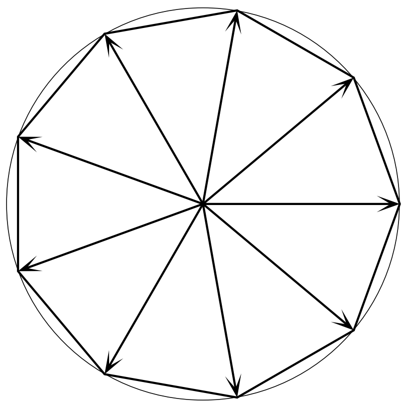


Figura 1: Raíces novenas de la unidad

El número complejo i es la raíz cuadrada principal del número complejo -1.

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Demostración. Se tiene que $\arg(-1) = \pi$. Por tanto:

$$\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2) = i$$

¿Se verifica la igualdad $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$? ¡En general no! porque $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw *pero no tiene por qué ser la principal*. Se verifica que:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi}$$

Para $n = 2$, $z = w = -1$, tenemos $\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi$, y no se cumple la condición anterior. En este caso:

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de $(-1)(-1) = 1$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1. Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

$$-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Para otro ejemplo de esto mismo, podemos tomar $z = i$, $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, con lo que $\arg(i) + \arg(w) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} > \pi$ por lo que

$$\sqrt{i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \neq \sqrt{i}\sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Lo que puede comprobarse haciendo los cálculos

$$\arg\left(i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$$

Por lo que

$$\sqrt{i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\cos(-\frac{5\pi}{12})+i\operatorname{sen}(-\frac{5\pi}{12})=\cos(\frac{5\pi}{12})-i\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{12})$$

Y teniendo en cuenta que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ deducimos que

$$\cos(\frac{5\pi}{12})=\cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6})-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

y

$$\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{12})=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Por lo que

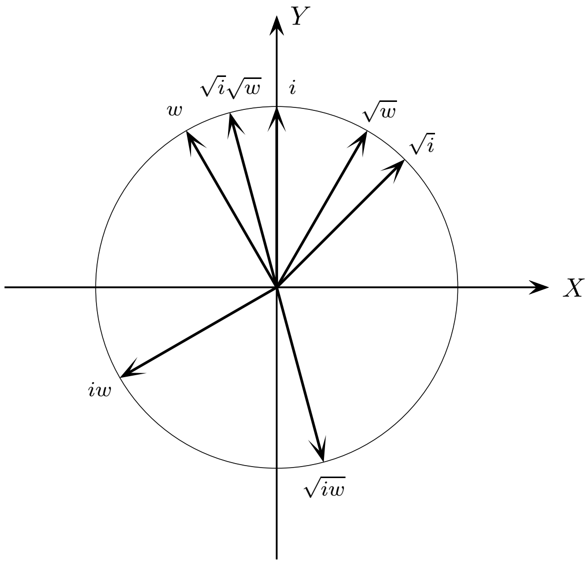
$$\sqrt{i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{i}\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

es decir

$$\sqrt{i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=-\sqrt{i}\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

También puede comprobarse gráficamente.



Si, por ejemplo, los números z y w están en el semiplano de la derecha, $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Re} w>0$, entonces $-\pi/2<\arg(z)<\pi/2$ y $-\pi/2<\arg(w)<\pi/2$; por tanto en este caso $\arg(z)+\arg(w)=\arg(zw)$ por lo que $\sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}=\sqrt[n]{zw}$. En particular, esto es cierto cuando $z,w\in\mathbb{R}^+$. Por tanto, *no perdemos ninguna de las propiedades de las raíces reales positivas al extender las raíces a* $\mathbb{C}$*.*

La función exponencial compleja

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+i\,y}=\exp(x+i\,y)=\mathrm{e}^{x}\big(\cos y+i\operatorname{sen} y\big)}$$

Es una *extensión* de la exponencial real a todo $\mathbb{C}$. Observa que:

$$\boxed{|\,\mathrm{e}^{z}\,|=\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z},\quad \operatorname{Im} z\in\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{z})}$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\,t}=\cos t+i\operatorname{sen} t\qquad \text{(para todo } t\in\mathbb{R})}$$

De la fórmula de Euler se deducen las *Ecuaciones de Euler*:

$$\boxed{\cos t=\frac{\mathrm{e}^{i\,t}+\mathrm{e}^{-i\,t}}{2},\qquad \operatorname{sen} t=\frac{\mathrm{e}^{i\,t}-\mathrm{e}^{-i\,t}}{2i}\quad (t\in\mathbb{R})}$$

La exponencial compleja transforma sumas en productos.

$$\boxed{\mathrm{e}^{z+w}=\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{w}\qquad \text{para todos } z,w\in\mathbb{C}}$$

La exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$.

$$\boxed{\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{z+2k\pi i}\qquad \text{para todo } k\in\mathbb{Z}}$$